

CORSO DI POLITICA ECONOMICA

AA 2018-2019

IL MODELLO SOLOW: FONDAMENTI

DIPARTIMENTO DI TEORIA
ECONOMICA E METODI QUANTITATIVI
PER LE SCELTE POLITICHE



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

DOCENTE

PIERLUIGI MONTALBANO

p.montalbano@dte.uniroma1.it

Il modello Solow (1956)

- Funzione di produzione omogenea di primo grado (offerta): $Y = F(K, L)$
- Tutto espresso in termini pro-capite (o meglio per lavoratore) $y = f(k)$
- Prodotto marginale del capitale decrescente (contributo alla produzione di 1 unità aggiuntiva di capitale): $f' > 0$ $f'' < 0$
- Funzione di investimento (spesa per nuovi impianti): $i = sf(k)$
- Ammortamento (% costante δk) investimenti annuali necessari a sostituire il capitale logorato
- Variazione stock di capitale: $\Delta k = sf(k) - \delta k$ (*Equazione di moto*)
- Stato stazionario (equilibrio di lungo periodo): per $k = k^*$; $\Delta k = 0$
- Il sistema tende v/stato stazionario (Equilibrio dinamico).



4.1. La funzione di produzione aggregata

La funzione di produzione aggregata specifica la relazione tra produzione aggregata e input produttivi:

$$Y = F(K, N)$$

Dove

Y= la produzione aggregata;

K= capitale : somma di macchinari, impianti, uffici e immobili;

N= lavoro: numero di lavoratori impiegati;

F= stato della tecnologia: l'insieme dei progetti che definiscono sia la gamma di beni che possono essere prodotti nell'economia sia le tecniche disponibili per produrli.



4.2. Rendimenti di scala e rendimenti dei fattori

Proprietà dei **rendimenti di scala costanti**: raddoppiando la scala di produzione, cioè raddoppiando le quantità di capitale e di lavoro impiegate, anche il prodotto raddoppia:

$$2Y = F(2K, 2N)$$

In generale, per ogni x :

$$xY = F(xK, xN)$$



4.3. Prodotto e capitale per occupato

Poniamo x uguale a $1/N$ e otteniamo:

$$\frac{Y}{N} = F\left(\frac{K}{N}, \frac{N}{N}\right) = F\left(\frac{K}{N}, 1\right)$$

Dove Y/N rappresenta il prodotto per occupato e K/N il capitale per occupato.

L'equazione dice che la quantità di prodotto per occupato dipende dalla quantità di capitale per occupato.



4.2. Rendimenti di scala e rendimenti dei fattori

Rendimenti decrescenti del capitale:

aumenti di capitale generano, dato il lavoro, aumenti di prodotto tanto minori quando è maggiore il livello di capitale.

Rendimenti decrescenti del lavoro:

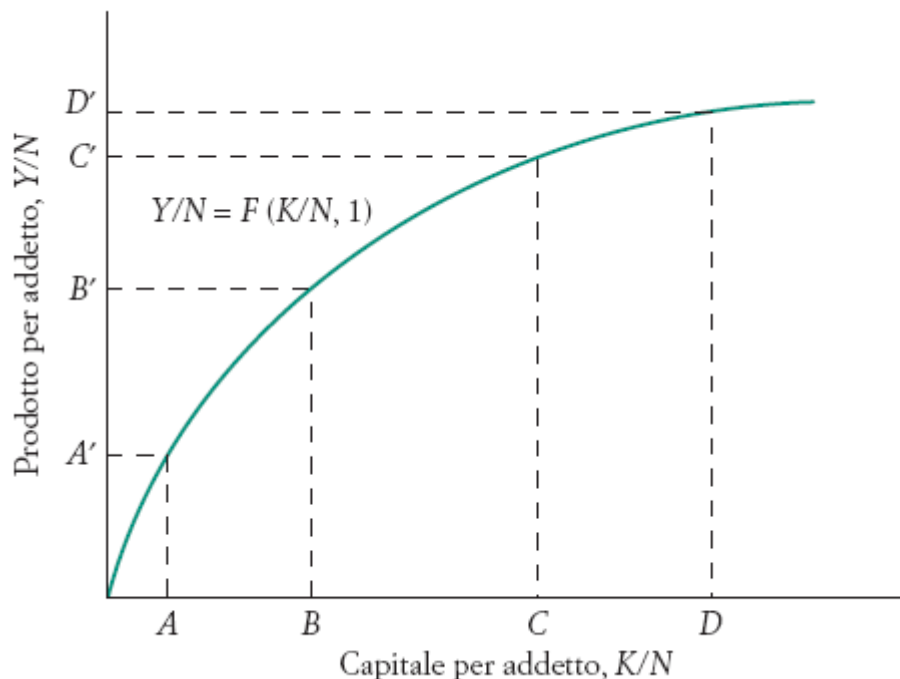
aumenti della quantità di lavoro, dato il capitale, generano incrementi di prodotto tanto minori quanto maggiore è la quantità di lavoro già impiegata.



4.2. Rendimenti di scala e rendimenti dei fattori

Prodotto e capitale per addetto.

Aumenti del capitale per addetto provocano incrementi sempre più piccoli del prodotto per addetto.



Per la proprietà dei rendimenti marginali decrescenti: nel punto A, dove il capitale è più basso, un aumento del capitale per occupato, pari alla distanza AB provoca un aumento del prodotto per occupato pari a A'B'. Questo aumento è maggiore di quello provocato da un aumento di capitale per occupato pari alla distanza CD - ove il capitale è più elevato - infatti $C'D' < A'B'$.

Ipotesi: funzione di produzione Cobb-Douglas $Y = K^\alpha N^{1-\alpha}$

$0 < \alpha < 1$

Perché si usa la funzione C-D?

□ Si ritiene fornisca una descrizione sufficientemente appropriata della relazione empirica in oggetto;

□ Facilita il calcolo dei tassi di crescita: Per calcolare il tasso di crescita di una grandezza elevata a potenza basta moltiplicare la potenza per la variazione proporzionale della grandezza stessa

□ Infatti, noto α si è in grado di calcolare quale è il livello di produzione per lavoratore per ogni possibile valore del capitale per lavoratore

$$\frac{Y}{N} = \frac{K^\alpha}{N}$$

□ E' una funzione crescente quindi si adatta al requisito intuitivo che una maggiore quantità di fattore induce una maggiore quantità di prodotto



Il valore del parametro α è importante

Quando il parametro α è vicino a zero, intervengono rendimenti marginali rapidamente decrescenti degli aumenti del capitale per lavoratore.

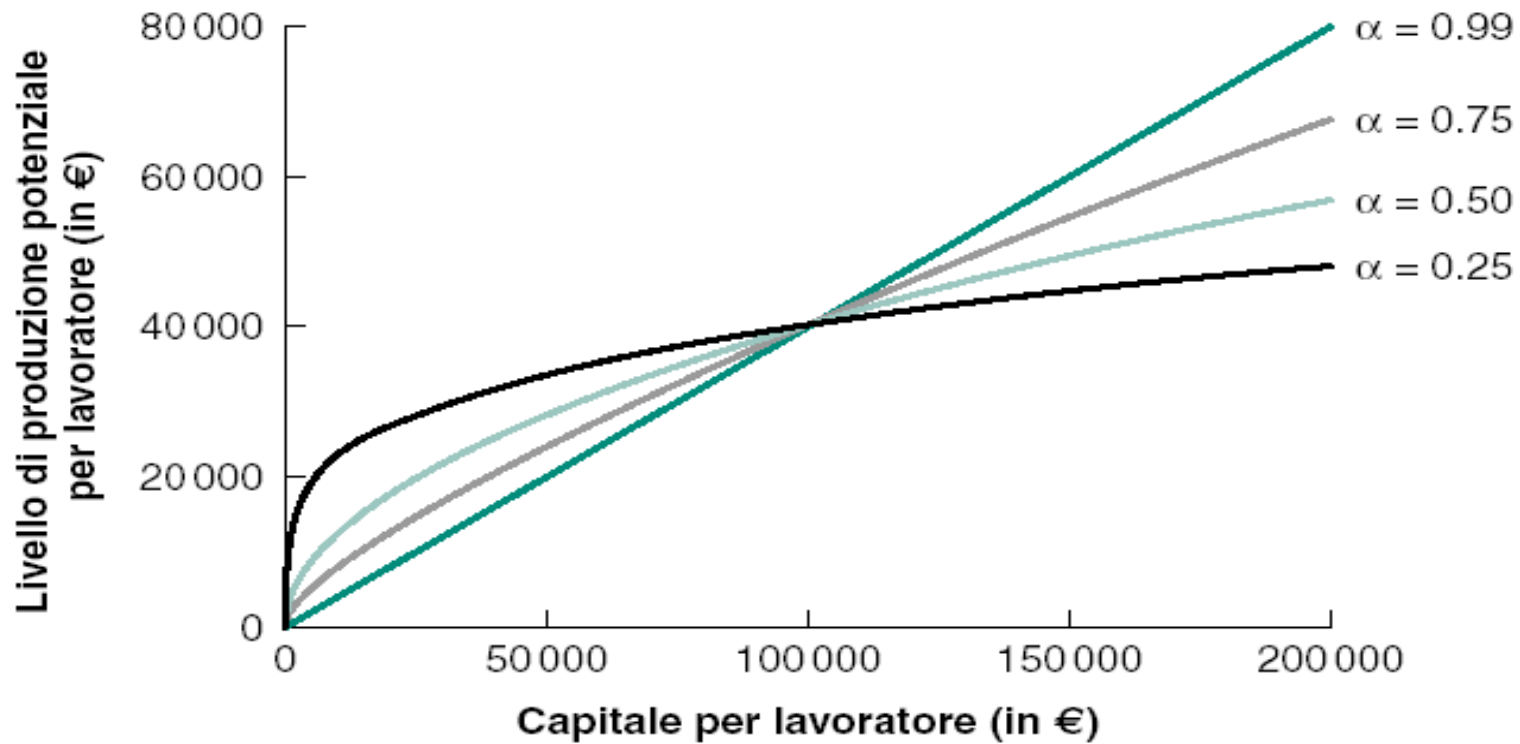
□ Un aumento del capitale per lavoratore genera un aumento del livello di produzione molto minore di quello generato dall'ultimo aumento del capitale per lavoratore. I rendimenti decrescenti dell'accumulazione di capitale intervengono in modo rapido e violento.



Il valore del parametro α è importante (2)

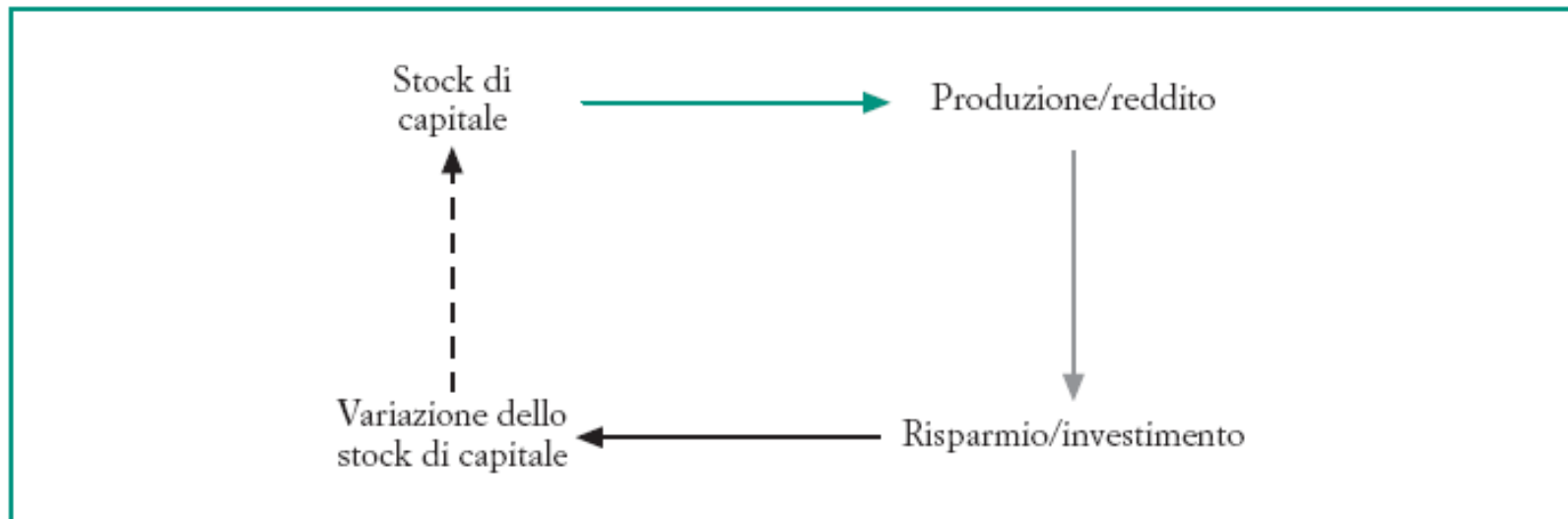
- ❑ Più il parametro α si avvicina ad 1 più lenti sono i rendimenti decrescenti dell'accumulazione di capitale
- ❑ Se $\alpha = 1$, il livello di produzione per lavoratore è direttamente proporzionale al capitale per lavoratore (e l'accumulazione di capitale è un fattore permanente di crescita)
- ❑ In pratica, se si raddoppia il capitale per lavoratore, si raddoppia il livello di produzione per lavoratore. Non vi sono rendimenti decrescenti dell'accumulazione di capitale.





Il circuito capitale, produzione, risparmio/investimento

- l'ammontare di capitale nell'economia determina il livello di produzione
- il livello di produzione determina a sua volta il livello di risparmio e di investimento e quindi il capitale accumulato nel tempo



Analisi del canale 1: Gli effetti del capitale sulla produzione

Partendo dall'ipotesi dei rendimenti di scala, avremo:

$$\frac{Y}{N} = F\left(\frac{K}{N}, 1\right)$$

Assumiamo temporaneamente le seguenti ipotesi:

- la dimensione della popolazione, il tasso di partecipazione e il tasso naturale di disoccupazione **sono costanti**;
- **non esiste progresso tecnologico**.

La relazione tra produzione e capitale per addetto, dal lato della produzione, è data da:

$$\frac{Y_t}{N} = f\left(\frac{K_t}{N}\right)$$



Analisi del canale 2: Gli effetti della produzione sull'accumulazione di capitale

Produzione e investimento.

3 ulteriori ipotesi:

1. assumiamo un'economia chiusa

$$I = S + (T - G)$$

2. assumiamo che il risparmio pubblico (T-G) sia uguale a zero

$$I = S$$

3. assumiamo che il risparmio privato sia proporzionale al reddito, cioè:

$$S = sY$$

Otteniamo:

$$I_t = sY_t$$



Analisi del canale 3: Investimento e accumulazione di capitale.

L'andamento dello stock di capitale è dato da (ove l'I è un flusso):

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

Sostituendo all'I la sua relazione con il reddito e dividendo per N si ottiene la relazione tra produzione e accumulazione di capitale:

$$\frac{K_{t+1}}{N} = (1 - \delta) \frac{K_t}{N} + s \frac{Y_t}{N}$$

il capitale per addetto all'anno t+1 è uguale al capitale per addetto all'inizio dell'anno t, tenuto conto del deprezzamento, più l'investimento per addetto effettuato nell'anno t, che a sua volta è uguale al tasso di risparmio moltiplicato per il prodotto per addetto nell'anno t.



La dinamica del capitale e della produzione

Riordinando i termini (spostando K_t/N sul lato sinistro e ricordando che $sY = sf(K/N)$) si ha

$$\frac{K_{t+1}}{N} - \frac{K_t}{N} = sf\left(\frac{K_t}{N}\right) - \delta \frac{K_t}{N}$$

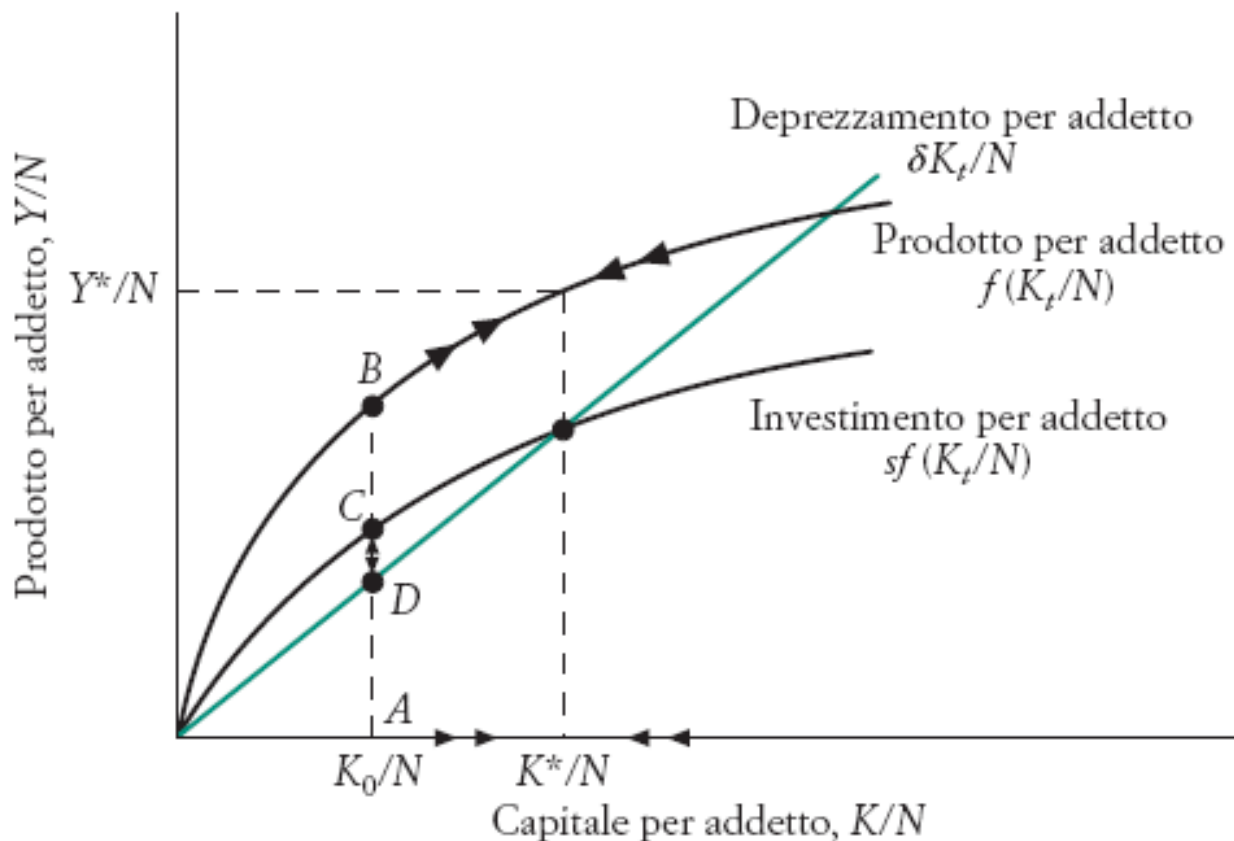
Variazione del capitale dall'anno t all'anno $t + 1$ = Investimento nell'anno t - Deprezzamento nell'anno t

Se l'investimento per addetto eccede il deprezzamento per addetto, la variazione del capitale per addetto è positiva: il capitale per addetto aumenta.

Se l'investimento per addetto è inferiore al deprezzamento per addetto, la variazione del capitale per addetto è negativa: il capitale per addetto diminuisce.



La dinamica del capitale e della produzione



Dinamica della produzione e del capitale.

Quando il capitale e la produzione sono bassi, l'investimento eccede il deprezzamento e il capitale aumenta. Quando il capitale e la produzione sono elevati, l'investimento è inferiore al deprezzamento e il capitale diminuisce.



Capitale e produzione in stato stazionario

La situazione in cui prodotto per addetto e capitale per addetto sono costanti è chiamata lo **stato stazionario** dell'economia.

Il valore del capitale per addetto di stato stazionario è dato da:

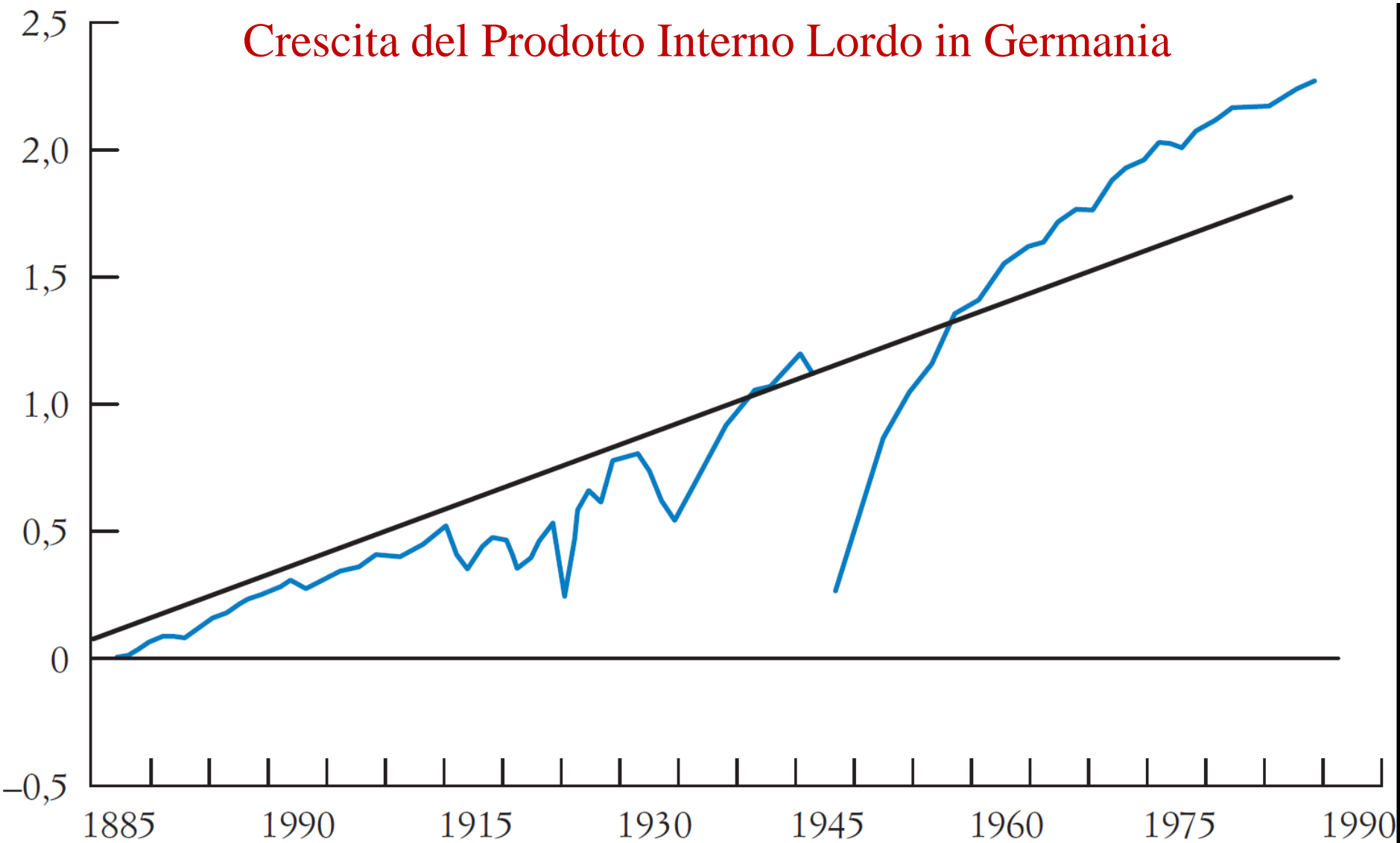
$$sf\left(\frac{K^*}{N}\right) = \delta \frac{K^*}{N}$$

Dato il capitale per addetto (K^*/N), il valore di stato stazionario del prodotto per addetto (Y^*/N) è dato da:

$$\frac{Y^*}{N} = f\left(\frac{K^*}{N}\right)$$



Crescita del Prodotto Interno Lordo in Germania



Il progresso tecnologico nel modello di Solow

L'efficienza del lavoro

La funzione di produzione del modello di Solow:

$$F(K, L)$$

Può essere generalizzata per tenere conto della variazione dell'efficienza produttiva:

$$F(K, L \times E)$$

E = efficienza del lavoro



Il progresso tecnologico nel modello di Solow

L'efficienza del lavoro

In cui $L \times E$ è il numero di lavoratori "effettivi"

Il progresso tecnologico equivale a un aumento della forza lavoro.

L'efficienza del lavoro E aumenta al tasso g :

$$g = \frac{\Delta E}{E}$$

Esempio: $g = 0,02$, l'efficienza di L cresce al 2% all'anno

Progresso tecnologico: "Labor-augmenting"



Il progresso tecnologico nel modello di Solow

L'efficienza del lavoro

Possiamo esprimere tutte le variabili per
unità di lavoro effettivo:

Reddito: $y = Y/LE = f(Y/LE, 1)$

Capitale: $k = K/LE$

Risparmio, investimenti: $s y = s f(k)$



Il progresso tecnologico nel modello di Solow

L'efficienza del lavoro

La variazione del capitale per
unità di lavoro effettivo: $(\delta + n + g)k$

δk ammortamento

$n k$ crescita della popolazione

$g k$ progresso tecnologico (maggiore
efficienza dei lavoratori)



Lo stato stazionario In presenza di progresso tecnologico

Come nel modello base di Solow, in stato stazionario il capitale per unità di lavoro effettivo non varia:

$$\Delta k = s f(k) - (\delta + n + g)k = 0$$

NB: in questo caso smette di crescere il capitale per unità di lavoro effettivo...



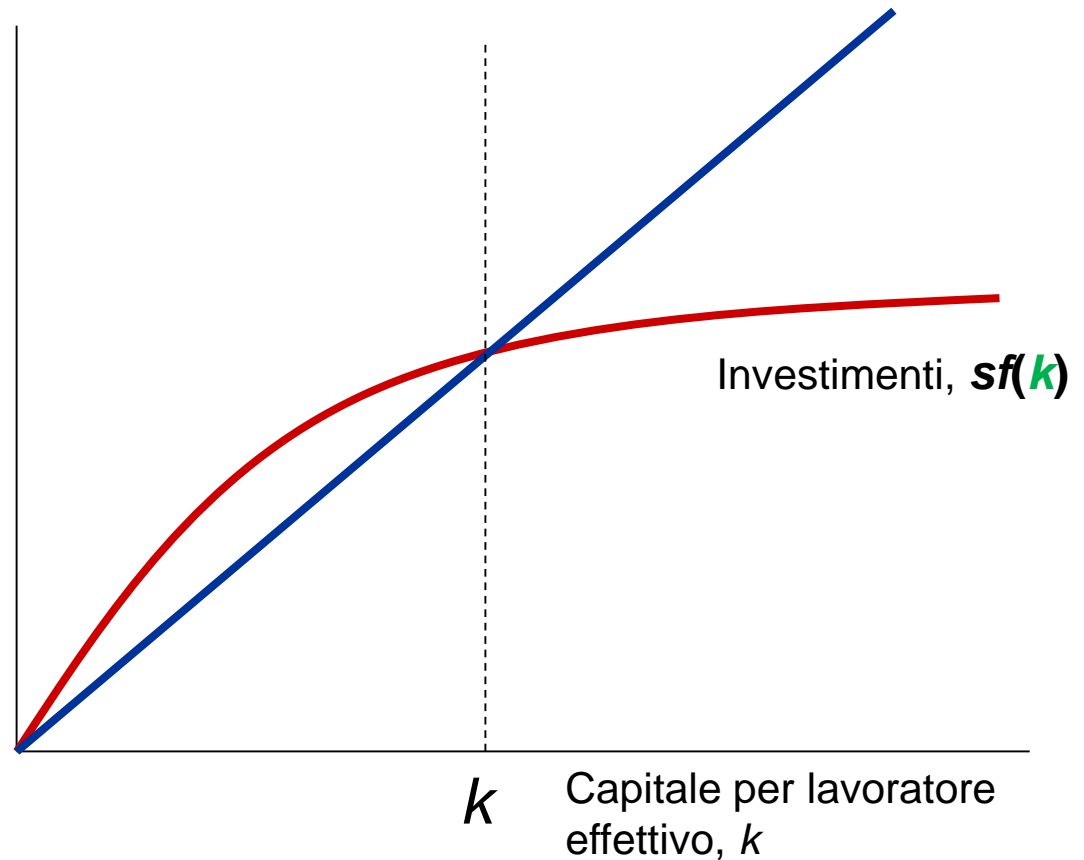
Lo stato stazionario In presenza di progresso tecnologico

Investimenti, investimenti di
sviluppo uniforme

Investimenti di sviluppo
uniforme, $(\delta + n + g)k$

In stato stazionario:

$$\Delta k = sf(k) - (\delta + n + g)k = 0$$



Gli effetti del progresso tecnologico

Quali sono i tassi di crescita delle variabili di stato stazionario?

Tasso di crescita di stato stazionario

<i>Variabile</i>	<i>Simbolo</i>	
Capitale per lavoratore effettivo	$k = K / (L \times E)$	0
Prodotto per lavoratore effettivo	$y = Y / (L \times E) = f(k)$	0
Prodotto per lavoratore	$Y/L = y \times E$	<i>g</i>
Prodotto totale	$Y = y \times (L \times E)$	<i>n + g</i>

Solo il progresso tecnologico spiega una crescita persistente del tenore di vita.



La crescita: dalla teoria alla prassi

Accumulazione dei fattori contro efficienza produttiva

I diversi redditi pro capite dei diversi paesi possono essere spiegati da:

- I. Differenze in **capitale** (fisico o umano) pro capite.
- II. Differenze nell'efficienza dei processi di produzione: **il livello tecnologico**.

Nella realtà:

- I paesi con maggiore capitale (fisico o umano) pro capite hanno maggiore efficienza produttiva.
- **In pratica i due fattori risultano essere correlati**

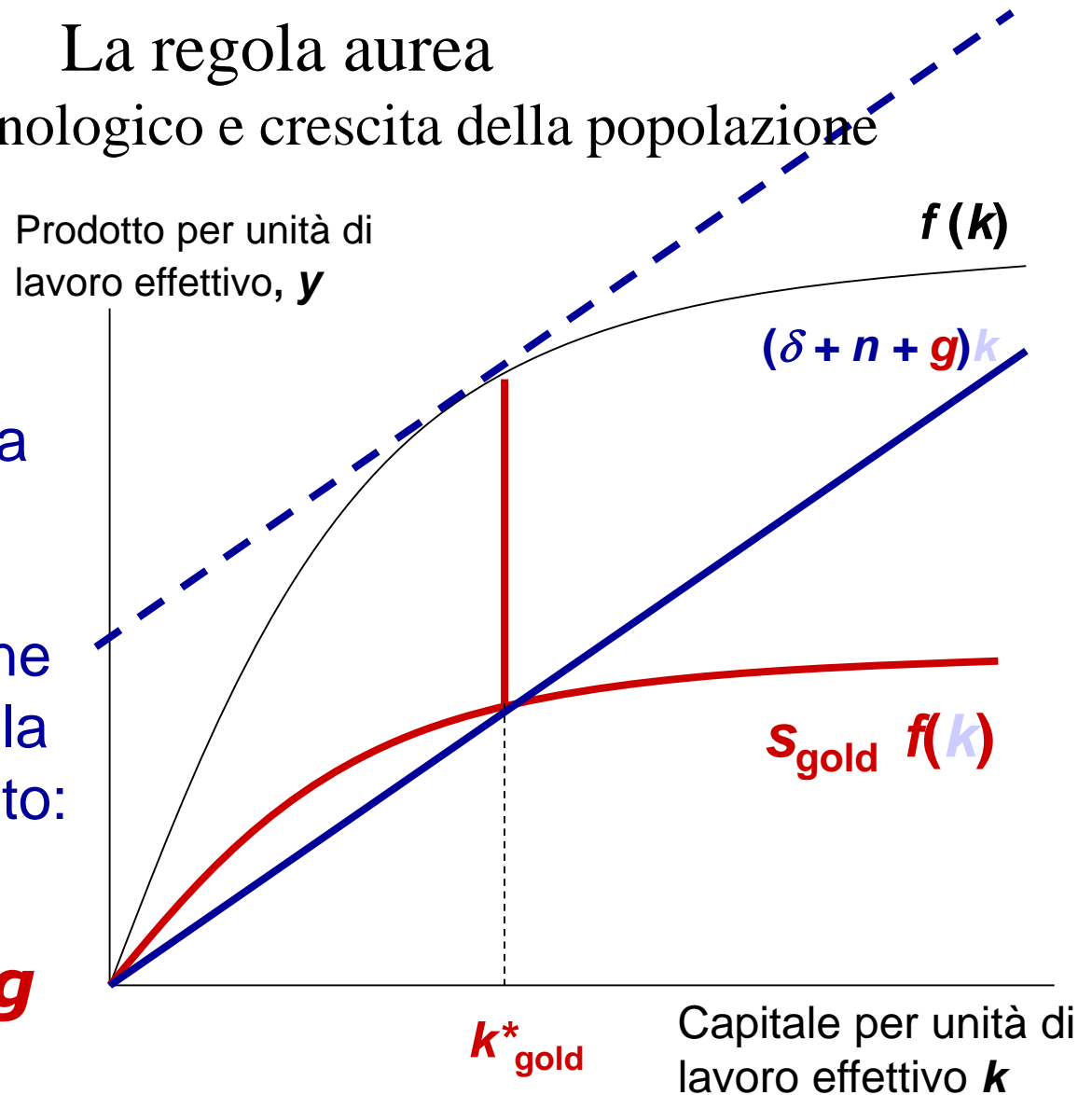


La regola aurea

Progresso tecnologico e crescita della popolazione

Graficamente nello stato stazionario della **regola aurea** la pendenza della funzione di produzione è uguale a quella della retta di ammortamento:

$$PMK = \delta + n + g$$



Le politiche per promuovere la crescita

- **Valutare il tasso di risparmio.**

Il risparmio andrebbe aumentato o ridotto?

- **Allocare gli investimenti in una economia:**

Capitale privato, pubblico o capitale umano?

- **Incentivare il progresso tecnologico:**

Quali strumenti e quali politiche permettono di incentivare il progresso tecnologico?



Le politiche per promuovere la crescita

La valutazione del tasso di risparmio

La regola aurea può essere utilizzata per determinare se il tasso di risparmio è troppo alto, basso oppure ottimale.

Per fare questo confrontiamo:

$$(\mathbf{PMK} - \delta) \text{ con } (\mathbf{n} + \mathbf{g})$$

- Se $(\mathbf{PMK} - \delta) > (\mathbf{n} + \mathbf{g})$, allora \mathbf{s} deve aumentare
- Se $(\mathbf{PMK} - \delta) < (\mathbf{n} + \mathbf{g})$, allora \mathbf{s} deve diminuire



Le politiche per promuovere la crescita

La valutazione del tasso di risparmio

Dobbiamo quindi stimare: $(PMK - \delta)$ e $(n + g)$. Per farlo usiamo le seguenti informazioni su **UK**:

1. Lo stock di capitale è circa 2,5 volte il PIL:

$$k = 2,5 y$$

2. Circa il 10% del PIL è usato per rimpiazzare il capitale ammortizzato:

$$\delta k = 0,1 y$$

3. Il reddito da capitale è circa il 30% del PIL

$$PMK \times k = 0,3 y$$



Le politiche per promuovere la crescita

La valutazione del tasso di risparmio

Abbiamo quindi:

I. $k = 2,5 y$

II. $\delta k = 0,1 y$

III. $PMK \times k = 0,3 y$

Per calcolare δ , dividiamo **II** per **I**:

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{0,1 y}{2,5 y} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{0,1}{2,5} = 0,04$$



Le politiche per promuovere la crescita

La valutazione del tasso di risparmio

Abbiamo quindi:

I. $k = 2,5 y$

II. $\delta k = 0,1 y$

III. $PMK \times k = 0,3 y$

Per calcolare **PMK**, dividiamo **III** per **I**:

$$\frac{PMK \times k}{k} = \frac{0,3 y}{2,5 y} \Rightarrow PMK = \frac{0,3}{2,5} = 0,12$$

Da cui: $PMK - \delta = 0,12 - 0,04 = 0,08$



Le politiche per promuovere la crescita

La valutazione del tasso di risparmio

Poiché la crescita reale del PIL pro capite è, in media, il 3% all'anno allora:

$$n + g = 0,03$$

Quindi confrontando: ($PMK - \delta$) e ($n + g$) abbiamo:

$$(PMK - \delta) = 0,08 > 0,03 = n + g$$

Conclusion: Il capitale dell'economia UK è inferiore a quello della regola aurea e un aumento del tasso di risparmio permetterebbe di aumentare i consumi di stato stazionario.



Le politiche per promuovere la crescita

Variare il saggio di risparmio

Quali politiche possono permettere un aumento del tasso di risparmio nazionale?

- Aumentare il risparmio **pubblico**: ridurre il deficit o aumentare il surplus.
- Aumentare il risparmio **privato** attraverso diversi incentivi (reattività?):
 - Aumentando la redditività degli investimenti: riduzione della tassazione sui profitti
 - Riduzione delle imposte sui redditi (e aumento di quelle sui consumi come l'imposta sul valore aggiunto)
 - Esenzioni fiscali sui piani previdenziali



Le politiche per promuovere la crescita

Allocare gli investimenti in una economia

Modello Solow ipotizza un solo K

Nella realtà esistono diversi tipi di capitale produttivo.

- Capitale **privato** (impianti, macchinari, ...)
- Capitale **pubblico** (infrastrutture, autostrade, ...)
- Capitale **umano**: le conoscenze abilità acquisite con il processo educativo, il lavoro ("learning by doing"), l'apprendistato, ecc.

In quale tipo di capitale è opportuno investire?



Le politiche per promuovere la crescita

Allocare gli investimenti in una economia

Il governo dovrebbe intervenire in maniera attiva? In quale modo?

Gli economisti sono divisi tra:

Interventisti: Il governo dovrebbe promuovere gli investimenti in tipi di capitale e settori caratterizzati da esternalità positive.

- Esempio: Educazione pubblica
- Esempio: Settori strategici (politica industriale)



Le politiche per promuovere la crescita

Allocare gli investimenti in una economia

Liberisti:

Il governo dovrebbe lasciare che l'allocazione delle risorse avvenga liberamente nel mercato.

La posizione del governo deve essere neutrale (ad esempio, uguale tassazione dei redditi di tutti i tipi di capitale).



Le politiche per promuovere la crescita

Allocare gli investimenti in una economia

Liberisti. Le motivazioni:

- Dubbi sulle capacità del governo di stimare le esternalità: È il governo in grado di decidere quali settori hanno un contenuto strategico?
- Dubbi sugli obiettivi dei politici: i processi di lobbying possono influenzare la politica industriale più delle considerazioni economiche (ad esempio, corruzione).



Le politiche per promuovere la crescita

Incentivare il progresso tecnologico

- Protezione dei **brevetti**: incoraggia l'innovazione garantendo un monopolio temporaneo (nuovi prodotti e beni capitali)
- Politiche fiscali di incentivo alla **R&S**
- Fondi e borse di studio per incoraggiare la **ricerca di base e universitaria**



La crescita: dalla teoria alla prassi

La crescita bilanciata

Nello stato stazionario del modello di Solow le diverse variabili crescono allo stesso **tasso di crescita bilanciata**

1. Y/L e K/L crescono allo stesso tasso: g .

Questo implica che il rapporto K/Y (capitale/prodotto) dovrebbe essere costante nel tempo.

2. I salari crescono allo stesso tasso di Y/L mentre la rendita del capitale è costante (e non decrescente come previsto da Marx)

Entrambe le predizioni sono verificate nella realtà.



La crescita: dalla teoria alla prassi

La crescita bilanciata

Quando il tasso di rendimento del capitale (al netto delle tasse) supera il saggio di crescita del reddito

($r > g$), le diseguaglianze economiche aumentano

Questa situazione (alla base delle società di rentiers) si è mantenuta per tutto il Sette e Ottocento e fino all'introduzione di politiche economiche di welfare e redistribuzione della ricchezza (dopoguerra) che portarono a ($r < g$), ma è stata una parentesi nella storia economica

(Piketty, 2014)



La crescita del passato

- ❑ Fino al 1500 la crescita della produttività fu bassa perché gli avanzamenti tecnologici, pur presenti, erano frenati dalla scarsità delle risorse.
- ❑ Prevalenza dei fattori frenanti dello sviluppo: crescita popolazione, diminuzione della produttività agricola (terreni via via meno fertili), ecc.
- ❑ Il progresso tecnico favoriva l'aumento della popolazione: miglioramenti del tenore di vita aumentavano la fertilità (e riducevano i tassi di mortalità) piuttosto che l'aumento della produttività del lavoro (R. Malthus).
- ❑ Dal 1500 in poi il tasso di progresso tecnologico supera l'aumento della popolazione, incrementando la produttività
- ❑ Quali saranno le dinamiche nel prossimo futuro? Quanta popolazione sostenibile con i tassi attuali di progresso tecnologico?



La crescita: dalla teoria alla prassi

Accumulazione dei fattori contro efficienza produttiva

- L'efficienza produttiva può incentivare l'accumulazione di capitale fisico e umano.
- Il capitale accumulato potrebbe avere delle esternalità positive sull'efficienza produttiva e sul livello tecnologico.
- Esistono condizioni esogene che rendono la produzione più efficiente e l'accumulazione di capitale più facile (zone tropicali, mortalità, istituzioni religiose e norme sociali).



Il modello Solow interpreta bene i fatti?

- La crescita dei paesi OCSE dal 1950 ad oggi appare effettivamente legata al progresso tecnologico e non ad un'accumulazione di capitale insolitamente alta (tasso di crescita del progresso tecnologico e tasso di crescita del prodotto per addetto coincidono).
- Anche nei paesi che sono partiti svantaggiati, la convergenza del prodotto pro capite sembra più legata al progresso tecnologico che alla maggiore accumulazione di capitale.
- Anche i paesi emergenti (es. Cina) che mostrano elevati tassi di crescita del tenore di vita (pil/addetto +9% annuo) sembrano avviati su di un **sentiero di crescita bilanciata** (tasso progresso tecnologico +9,2%)
- La convergenza sia all'interno dei paesi Ocse che nel caso della Cina e di altri paesi ha preso di solito la forma di **catch-up tecnologico**.

